

Matemática Básica

PROGRAMA DE ESTUDIOS GENERALES
ÁREA DE CIENCIAS



Escala de Richter

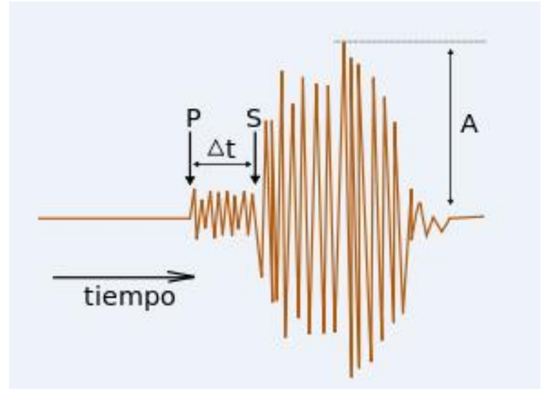
Los logaritmos tienen uso en la escala de Richter para determinar la energía que libera un terremoto.

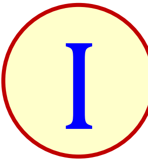
$$M = \log A + 3\log(8\Delta t) - 2.92 = \log \frac{A(\Delta t)^3}{1.62}$$

Donde:

$A =$ amplitud de las ondas en milímetros, tomada directamente en el sismograma.
$\Delta t =$ tiempo en segundo desde el inicio de las ondas **P** (Primarias) al de ondas **S** (Secundarias).
$M =$ magnitud arbitraria pero constante a terremotos que liberan la misma cantidad de energía.

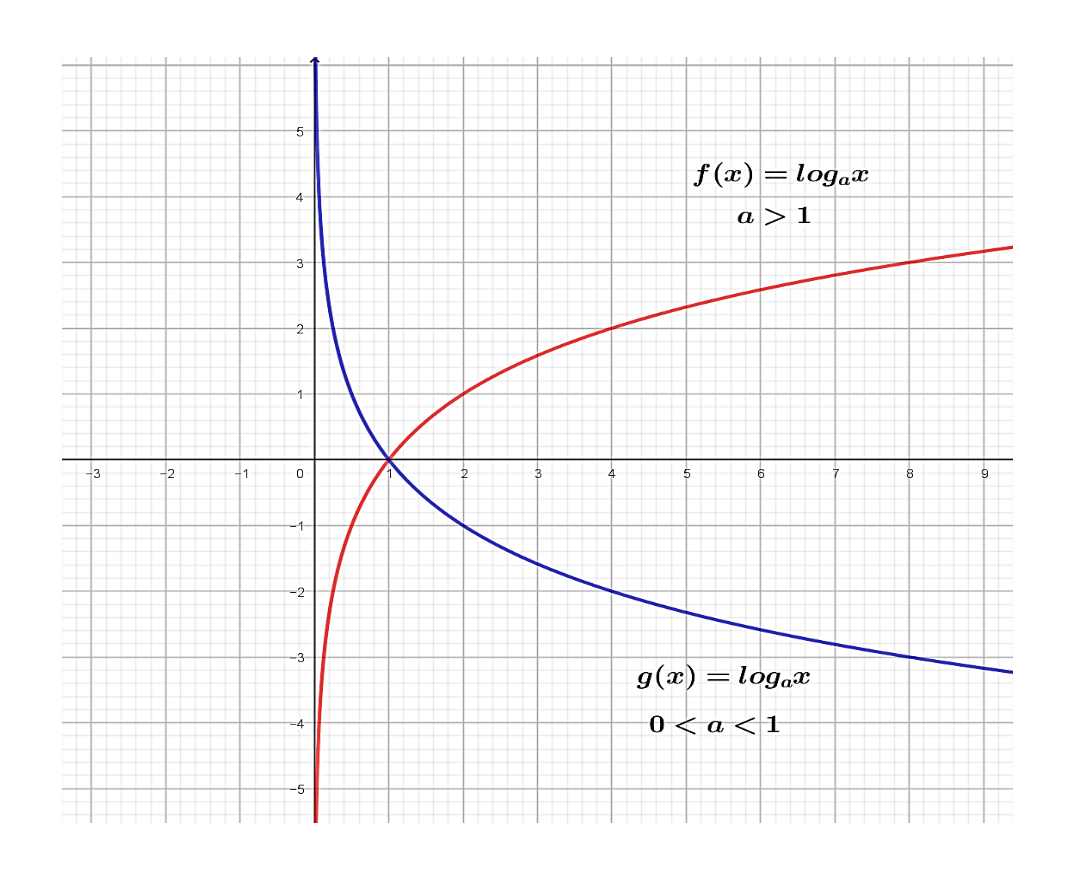
El logaritmo incorporado a la escala hace que los valores asignados a cada nivel aumenten de forma logarítmica y no de forma lineal.

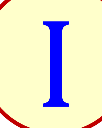






FUNCIÓN LOGARÍTMICA







CONTENIDO: FUNCIÓN LOGARITMO

- Dominio y rango de la función logaritmo.
- Gráfica de la función logarítmica indicando la ecuación de su asíntota.
- Inversa de la función logarítmica.
- Propiedades fundamentales.
- Ejercicios y aplicaciones.

OBJETIVO

Hallar el dominio, rango, ecuación de la asíntota de una función logaritmo y trazar su gráfica en el plano cartesiano.

I



DEFINICIÓN DE LOGARITMO

El logaritmo de un número ***N*** en base ***a***, denotado por $\log_a(N)$, e igual al número r, es tal que, a elevado a la r es N.

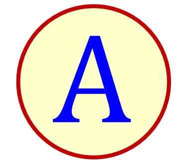
Es decir, $\log_a(N) = r \quad \Leftrightarrow \quad a^r = N$

- La base ***a*** del logaritmo es un número real positivo y diferente de 1.
- ***N*** es un número real positivo y recibe el nombre de **argumento** del logaritmo.

Ejemplos:

$\log_2(8) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^3 = 8$

$\log_5(25) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 5^2 = 25$





OBSERVACIÓN:

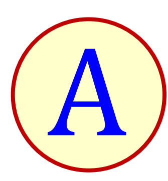
Los sistemas de logaritmos más utilizados son:

i) Logaritmos decimales (base $a = 10$) que se denota por

$$\log_{10}(N) = \log(N)$$

ii) Logaritmos naturales o neperianos (base $a = e$) que se denota por

$$\log_{e}(N) = \ln(N)$$





PROPIEDADES DE LOGARITMOS

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces:

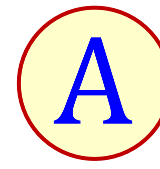
a) $\log_a(1) = 0 \ \wedge \ \log_a(a) = 1$

b) $\log_a(MN) = \log_a(M) + \log_a(N)$, $M > 0$, $N > 0$

c) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a(M) - \log_a(N)$, $M > 0$, $N > 0$

d) $\log_a\left(N^k\right) = k\log_a(N)$, $N > 0$

e) $a^{\log_a(N)} = (N)$, $N > 0$





DEFINICIÓN DE FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Sea $\boldsymbol{a}$ un número real con $a > 0$ y $a \neq 1$. La función logarítmica de base a es la función inversa de la función exponencial $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ y está dada por

$$\boldsymbol{y = f^{-1}(x) = log_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y}$$

Donde,

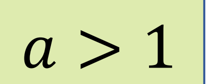
$$Dom(f^{-1}) = Ran(f) = \langle 0; +\infty \rangle$$

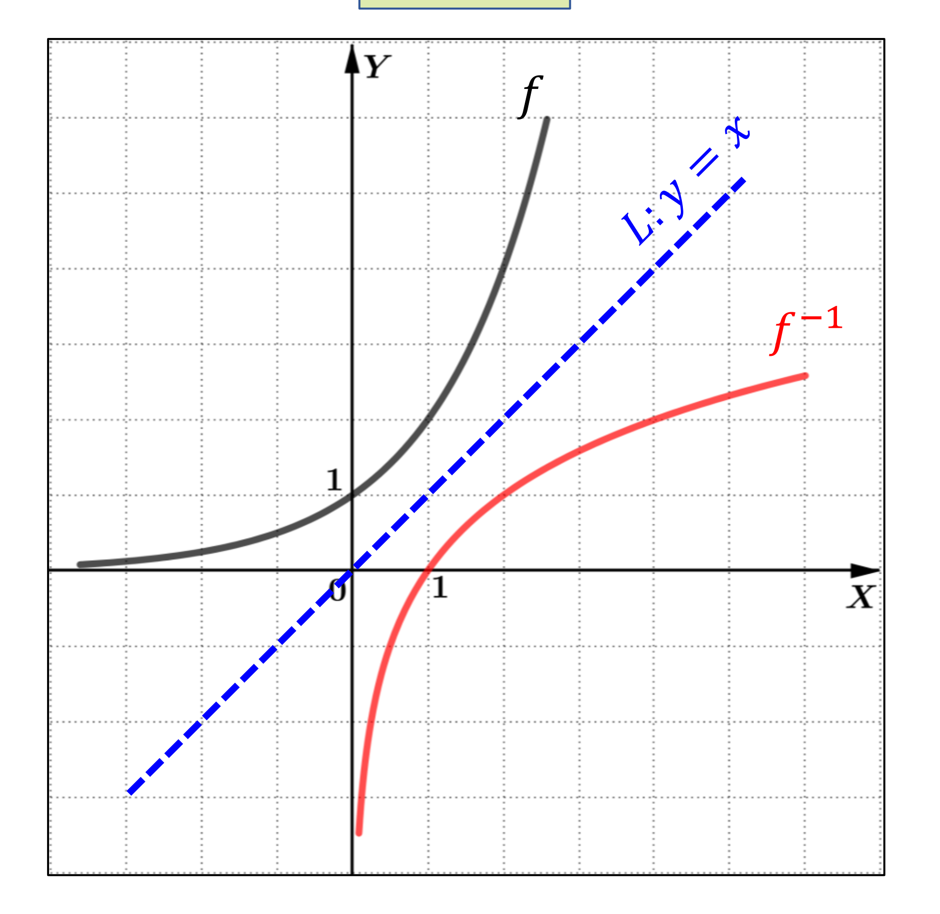
$$Ran(f^{-1}) = Dom(f) = \mathbb{R}.$$

La gráfica de f^{-1} (función logaritmo)tiene asíntota vertical (Eje Y) de ecuación $\boldsymbol{x = 0}$ que se obtiene al intercambiar y por x en la ecuación de la asíntota horizontal de la función exponencial f.

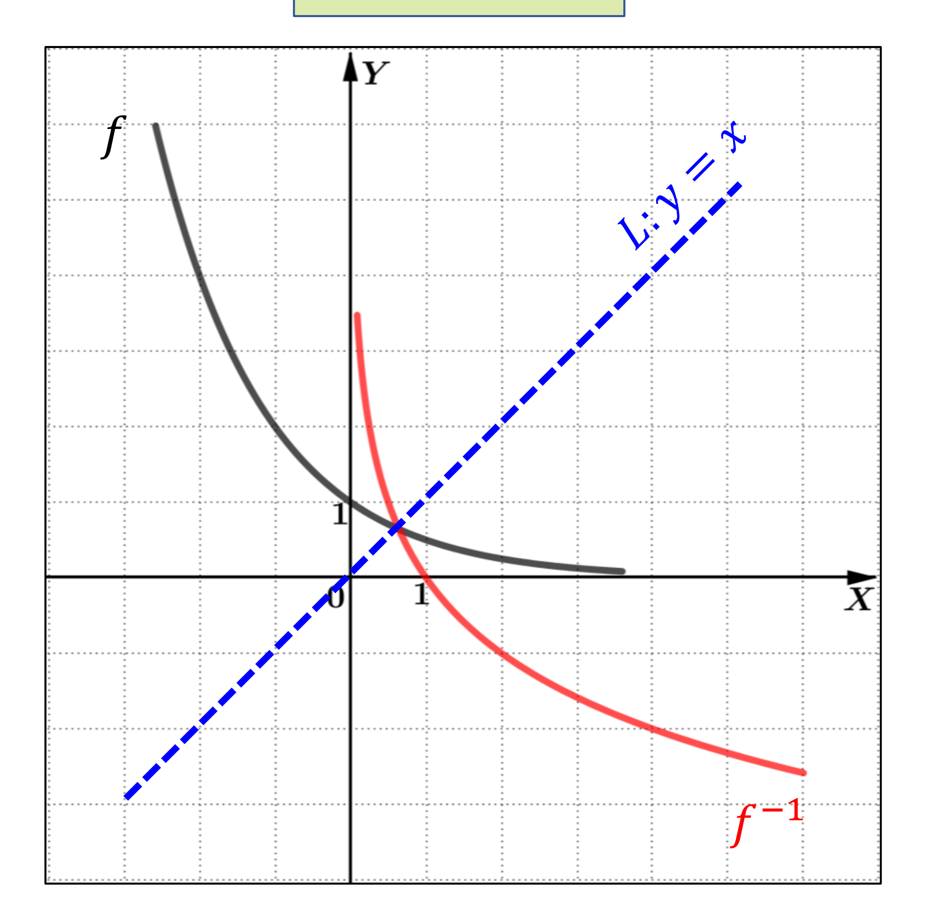


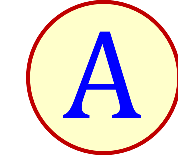
La gráfica de la función logaritmo $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ es simétrica a la gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$ con respecto a la recta L: $y = x$ (ver figuras).





$0 < a < 1$







RESUMEN DE FUNCIÓN LOGARITMO

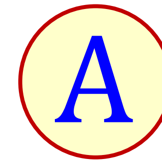
La función f definida por: $f(x) = log_a(x); \quad x > 0; \; a > 0; \; a \neq 1$

Se llama función logarítmica donde $\boldsymbol{a}$ es la base y $\boldsymbol{x}$ es el argumento.

$a > 1$

$0 < a < 1$

Asíntota vertical: $x = 0$





En general:

La función f definida por: $y = f(x) = k.\log_a(bx + c) + d$

presenta las siguientes características:

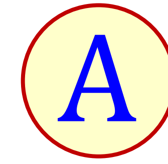
$a)$ $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ bx + c > 0\}$

b) La asíntota vertical de la gráfica de f es la recta

$L\colon\ bx + c = 0$ ó $L\colon\ x = -\dfrac{c}{b}$

c) Los puntos del dominio que se utilizan para tabular, se determinan de acuerdo con las propiedades

$\log_a(1) = 0 \qquad \log_a(a) = 1$





EJEMPLOS

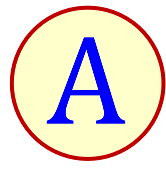
Grafique cada una de las siguientes funciones, indicando su dominio, rango y la ecuación de su asíntota vertical.

a) $f(x) = \log_3(x)$

b) $g(x) = \log_{1/2}(x - 2)$

c) $h(x) = \log_3(2x - 2) + 1$

d) $i(x) = 2 - \log_{1/2}(1 - x)$





Solución a)

$f(x) = \log_3(x)$

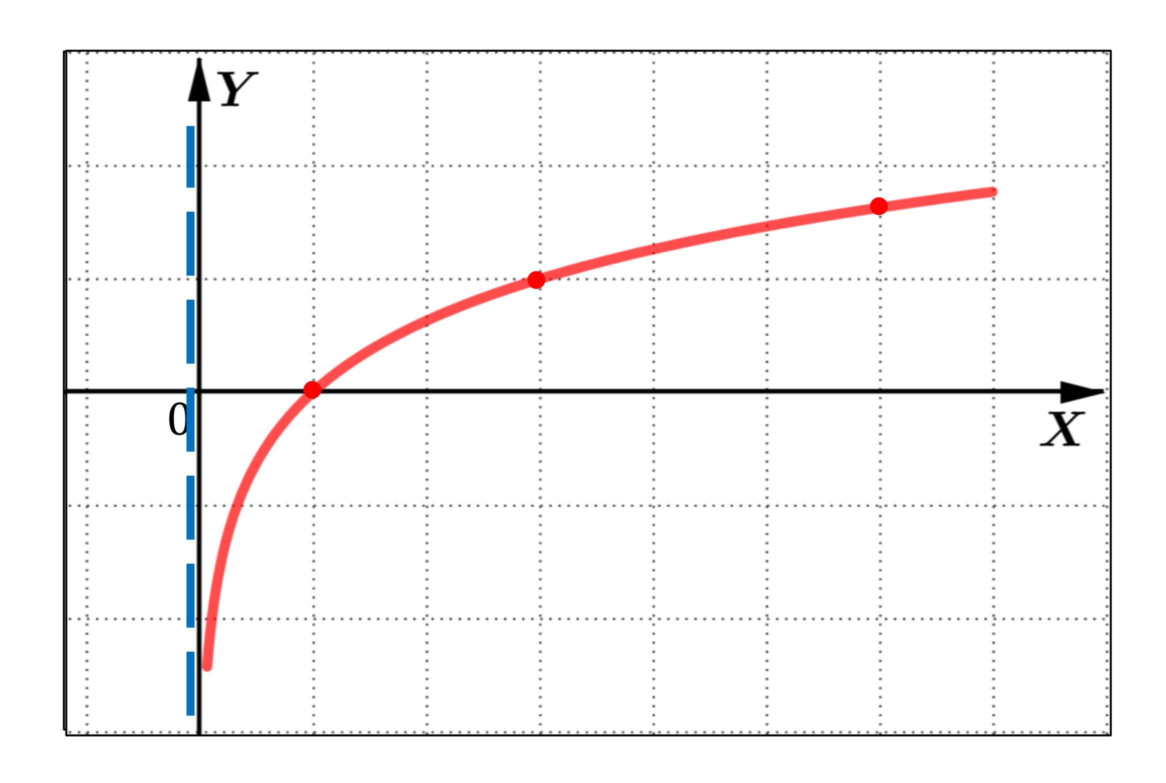
Como $x > 0$, $Dom(f) = \langle 0; +\infty \rangle$

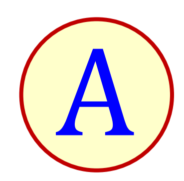
Asíntota vertical (A.V): $x = 0$

Al tabular algunos valores de x

x	$y = \log_3(x)$
1	0
3	1
6	1,63

$Ran(f) = \mathbb{R}$







Solución b) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$

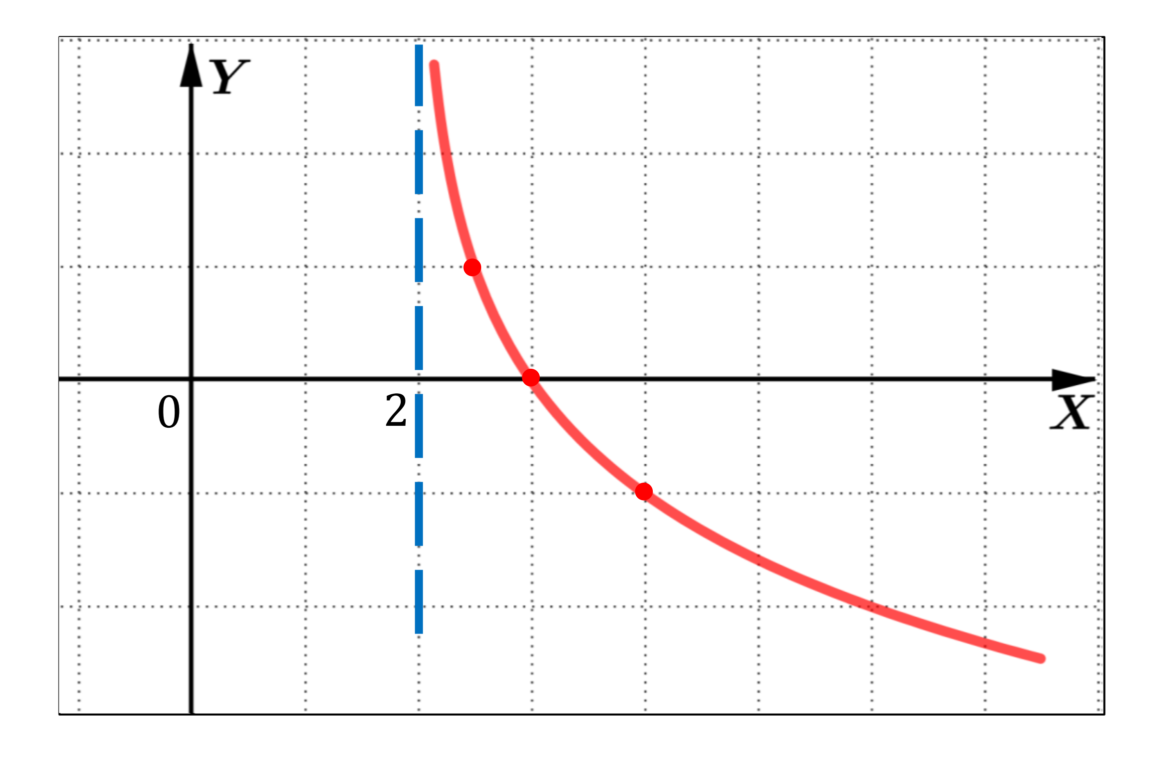
$Dom(g) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x - 2 > 0\}$

Luego, $x > 2 \quad \Rightarrow \quad Dom(g) = \langle 2; +\infty \rangle$

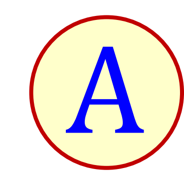
Asíntota vertical (A.V): $x = 2$

Al tabular algunos valores de x

	x	$y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$
$x - 2 = 1 \quad \Rightarrow$	3	0
$x - 2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$	5/2	1
	4	–1



$Ran(g) = \mathbb{R}$





Solución c) $h(x) = \log_3(2x - 2) + 1$

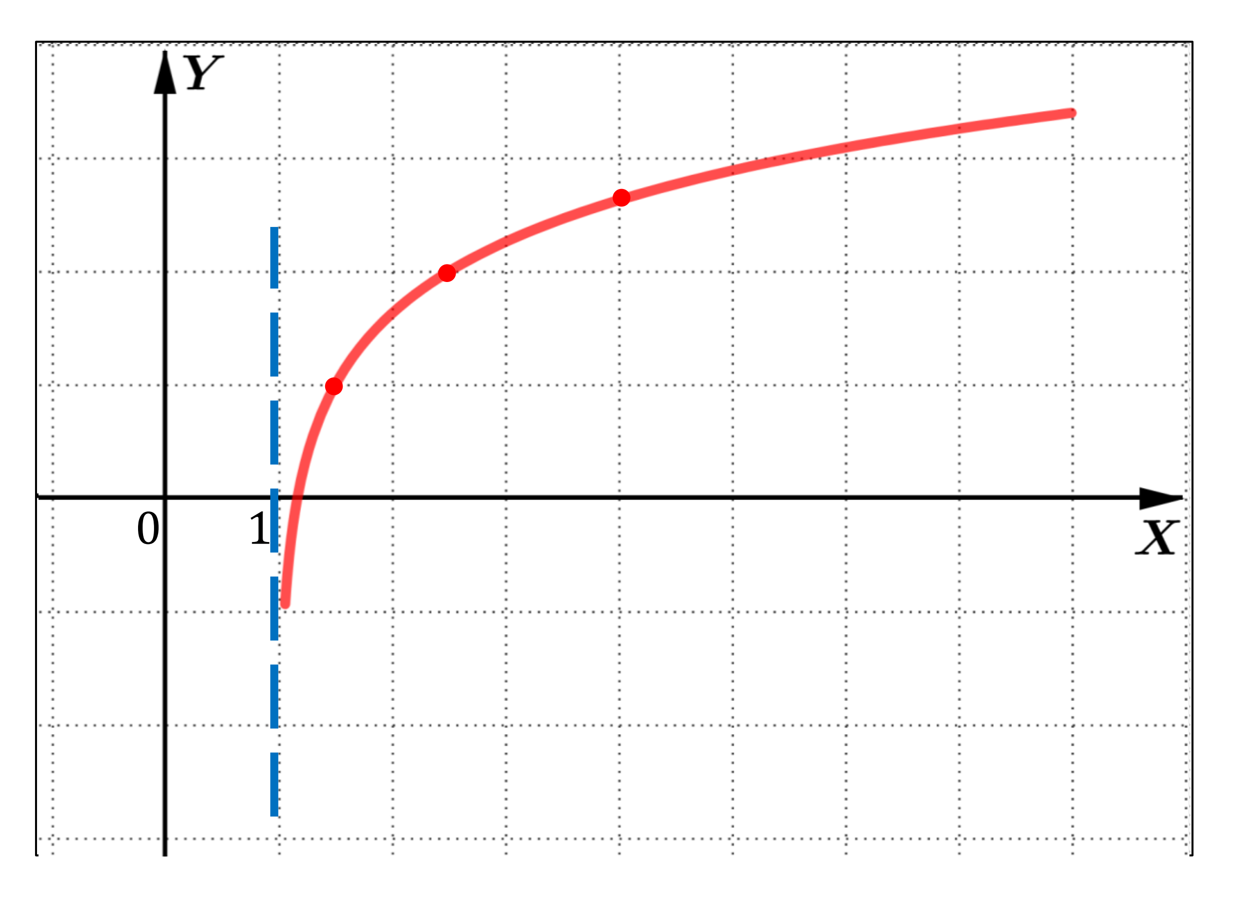
$Dom(h) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2x - 2 > 0\}$

Luego, $x > 1 \Rightarrow Dom(h) = \langle 1; +\infty \rangle$

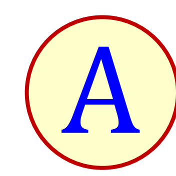
Asíntota vertical (A.V): $x = 1$

Al tabular algunos valores de x

	x	$y = \log_3(2x - 2) + 1$
$2x - 2 = 1 \Rightarrow$	$3/2$	1
$2x - 2 = 3 \Rightarrow$	$5/2$	2
	4	2,63



$Ran(h) = \mathbb{R}$





Solución d) $i(x) = 2 - \log_{\frac{1}{2}}(1 - x)$

Dominio: $1 - x > 0 \iff x < 1$

$Dom(i) = \langle -\infty; 1 \rangle$

Asíntota: $1 - x = 0$

$x = 1$

Al tabular algunos valores de x

x	y
0	2
1/2	1
–1	3

$Ran(i) = \mathbb{R}$

y = i(x)

x=1

A



EJERCICIOS DEL LIBRO

Ejercicio 1(g) (Pág. 435)



$l(x) = \log_2(x + 3)$

SOLUCIÓN:

Dominio: $x + 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -3$

$Dom(l) = \langle -3; +\infty \rangle$

Asíntota: $x + 3 = 0$ $\quad x = -3$

Al tabular algunos valores de x

x	y
–2	0
–1	1

$Ran(I) = \mathbb{R}$

x = -3

l(x) = log₂ (x+3)



Ejercicio 1(h) (Pág. 435)

$m(x) = 3 - \log_4(2 - x)$

SOLUCIÓN:

Dominio: $2 - x > 0 \iff x < 2$

$Dom(m) = \langle -\infty; 2 \rangle$

Asíntota: $2 - x = 0$ $\quad x = 2$

Al tabular algunos valores de x

x	y
1	3
−2	2

$Ran(m) = \mathbb{R}$

$m(x) = 3 - \log_4(2 - x)$

$x = 2$



Ejercicio 1(j) (Pág. 435)

$o(x) = \ln(2x - 1) - 3$

Recordar:

Logaritmos naturales o neperianos (base $a = e$) que se denota por:

$$\log_e N = \ln N$$

SOLUCIÓN:

Dominio: $2x - 1 > 0 \iff x > {}^{1}/_{2}$

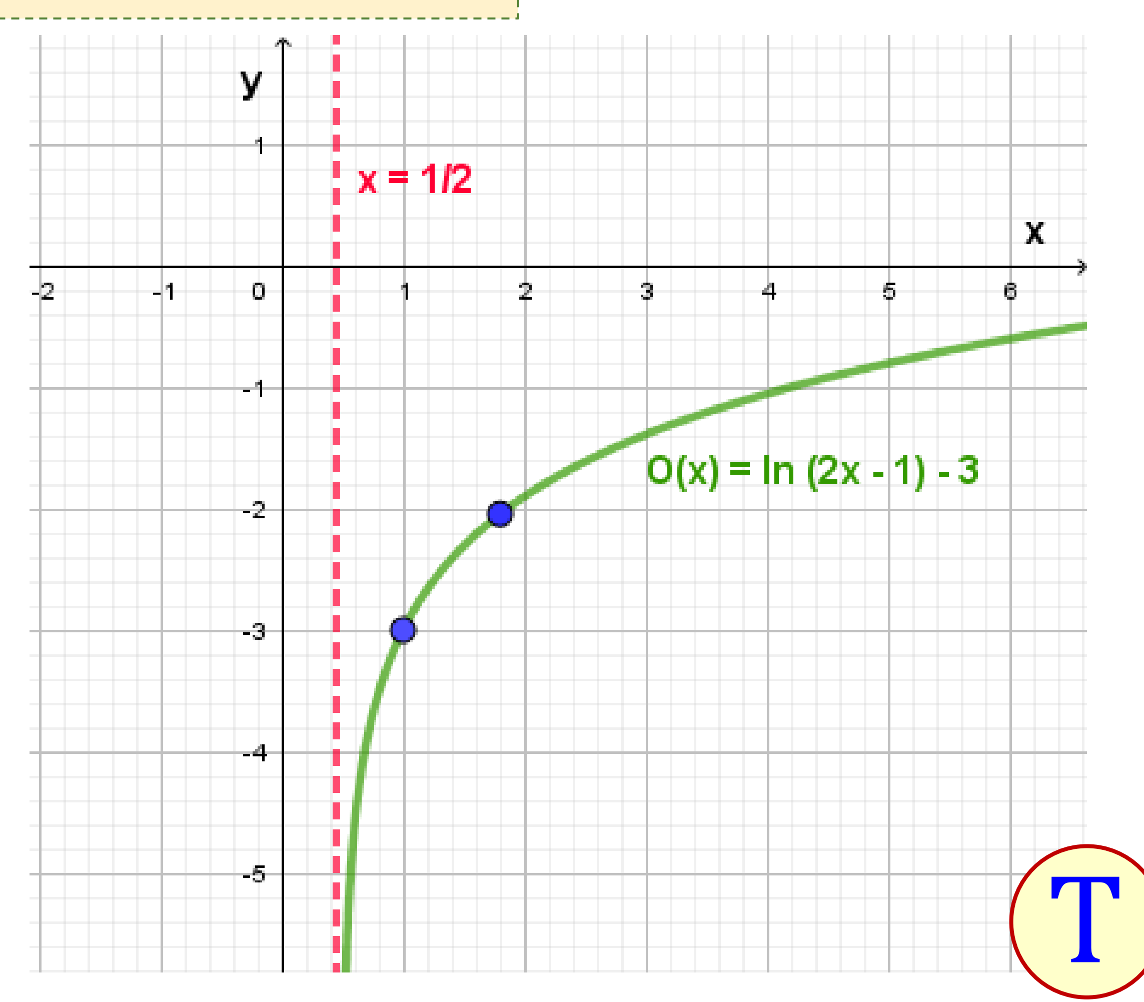
$$Dom(o) = \left\langle \frac{1}{2}; +\infty \right\rangle$$

Asíntota: $2x - 1 = 0$ $\quad x = \frac{1}{2}$

Al tabular algunos valores de x

x	y
1	−3
$\frac{e+1}{2}$	−2

$Ran(o) = \mathbb{R}$



Examen final 2020-0



Dada la función f definida por: $f\,(x) = 1 - \log_4(x-2)$

a) Grafique la función f e indique su dominio, su rango y la ecuación de su asíntota.
b) Determine si la función f es inyectiva. Luego halle la regla de correspondencia de la función inversa de f e indique su dominio, su rango y la ecuación de su asíntota.
c) Grafique la función f^{-1}.

SOLUCIÓN:

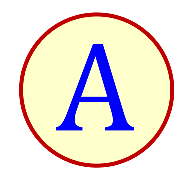
a) Dominio: $x - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 2$

$Dom(f) = \langle 2; +\infty \rangle$

Asíntota: $x - 2 = 0$ $\quad x = 2$

Al tabular algunos valores de x

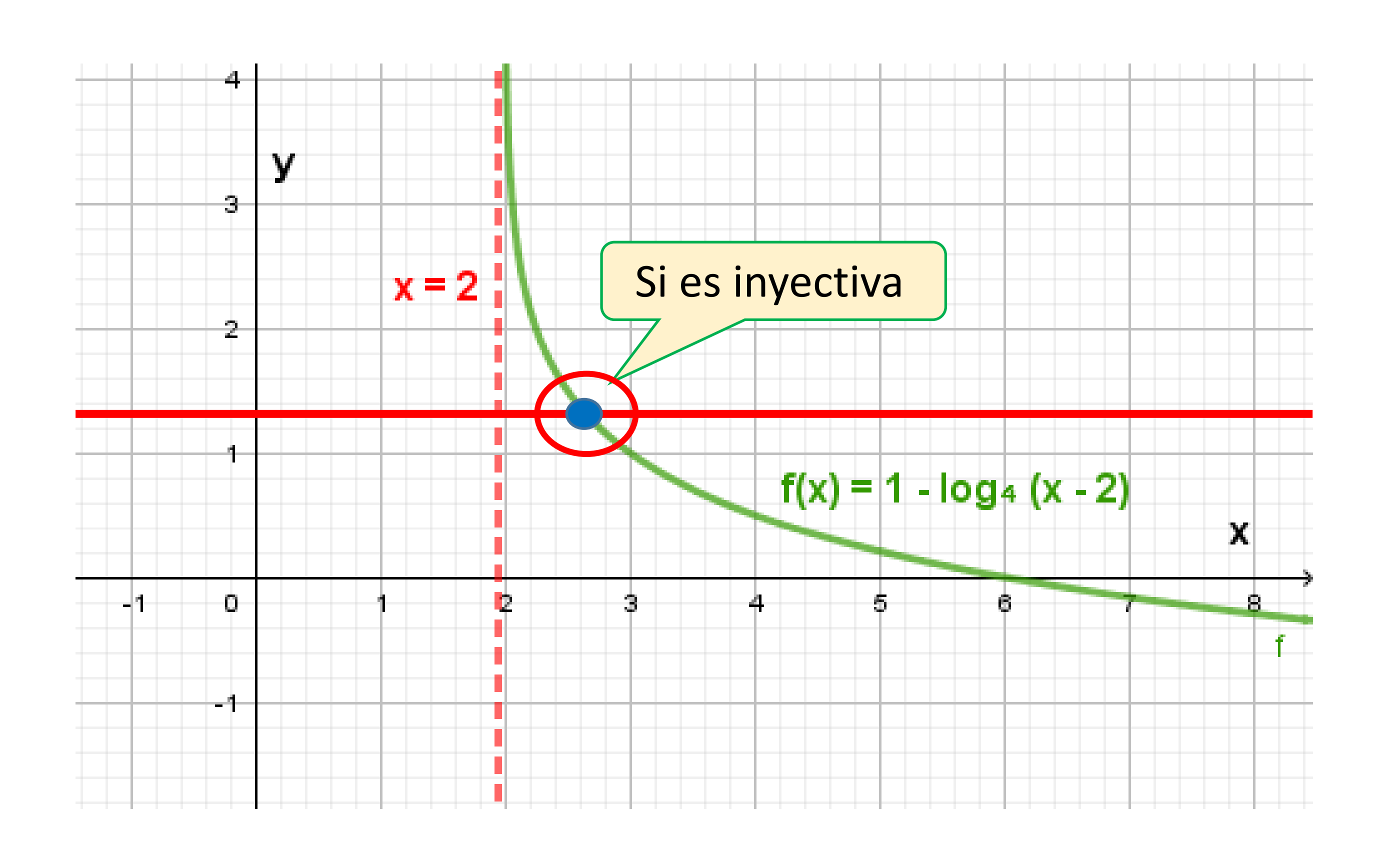
x	y
3	1
6	0





$f(x) = 1 - \log_4(x-2)$

x	y
3	1
6	0

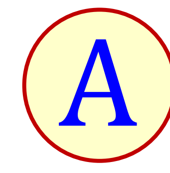


$Dom(f) = \langle 2; +\infty \rangle$

$Ran(f) = \mathbb{R}$

$Asíntota\ vertical:\ x = 2$

b) Primero determinamos si la función f es inyectiva, para ello hacemos la prueba de la recta horizontal y la debe cortar en un solo punto.





Función inversa:

b) Para hallar la función inversa de f, despejamos la variable x:

$y = 1 - \log_4(x-2)$

$\log_4(x-2) = 1 - y$

$x - 2 = 4^{1-y}$

$x = 4^{1-y} + 2$

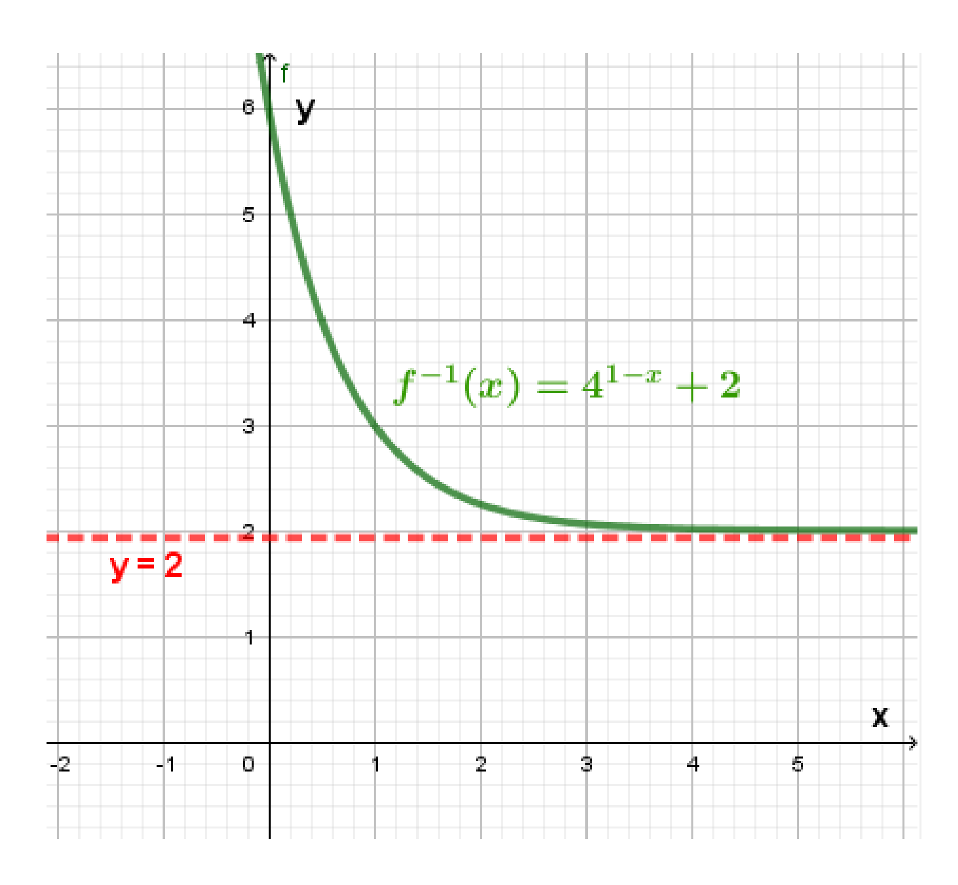
$\therefore f^{-1}(x) = 4^{1-x} + 2$

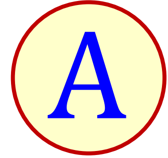
$Dom(f) = Ran(f^{-1}) = \langle 2; +\infty \rangle$

$Ran(f) = Dom(f^{-1}) = \mathbb{R}$

Asíntota de f^{-1}: $y = 2$

c) Gráfico







PROBLEMAS DE APLICACIÓN



Ejercicio 1

El peso (en kg) de una vicuña de una reserva ecológica está relacionado con su edad t (en años) mediante la función $w(t) = 60 - 55(0,9)^{2t}$.

a) ¿Cuánto pesa una vicuña recién nacida?

b) Si una vicuña adulta pesa 40,82 kg, determine su edad aproximada.

Solución

a) $t = 0$ (vicuña recién nacida)

$$w(0) = 60 - 55(0,9)^{2(0)} = 60 - 55 = 5$$

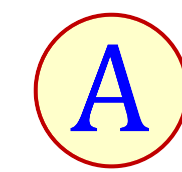
Rpta. Una vicuña recién nacida pesa 5 kg.

b) $w(t) = 40,82$

$$40,82 = 60 - 55(0,9)^{2t} \rightarrow 55(0,9)^{2t} = 19,18 \rightarrow (0,9)^{2t} = \frac{19,18}{55}$$

$$\leftrightarrow \quad 2t = \log_{0,9}\left(\frac{19,18}{55}\right) \rightarrow t = \frac{1}{2}\log_{0,9}\left(\frac{19,18}{55}\right) \approx 4,99$$

Rpta. Una vicuña adulta que pesa 40,82 kg tiene una edad aproximada de 5 años.





Ejercicio 2

Una fórmula para calcular la cantidad de dinero A (en dólares) que se gasta en publicidad en cierto tipo de juguetes está dado por $A(x) = 350 + 650\ln(x+1)$, en donde x es el número esperado de juguetes que se venderán.

a) Si se espera vender 2200 juguetes, ¿cuánto dinero se gastará en publicidad?

b) ¿Cuántos juguetes se espera vender si se gasta 6000 dólares en publicidad?

Solución

a) $x = 2200$

$$A(2200) = 350 + 650\ln(2200+1) = 5352{,}82$$

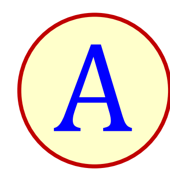
Rpta. Si se espera vender 2200 juguetes, se debe gastar 5352,83 dólares en publicidad.

b) $A(x) = 6000$

$$6000 = 350 + 650\ln(x+1) \rightarrow 650\ln(x+1) = 5650 \rightarrow \ln(x+1) = \frac{5650}{650}$$

$$\leftrightarrow \quad x + 1 = e^{113/13} \rightarrow x = e^{113/13} - 1 \approx 5955{,}9$$

Rpta. Se espera vender 5956 juguetes aproximadamente.





Ejercicio 3

La cantidad de cierto medicamento que queda en el organismo, en miligramos, después de t horas de haberse ingerido está dado por la función $C(t) = 500(0{,}8)^t$.

a) ¿Qué cantidad del medicamento se ha ingerido inicialmente?

b) ¿Cuántas horas después de haberse ingerido el medicamento quedan 256 miligramos en el organismo?

Solución

a) $t = 0$ (inicio de la ingesta)

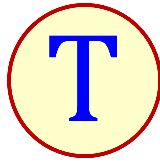
$C(0) = 500(0{,}8)^0 = 500$

Rpta. Se ha ingerido inicialmente 500 miligramos del medicamento.

b) $C(t) = 256$

$256 = 500(0{,}8)^t \rightarrow (0{,}8)^t = \dfrac{256}{500} \quad \leftrightarrow \quad t = \log_{0,8}\left(\dfrac{256}{500}\right) \rightarrow t = 3$

Rpta. Después de 3 horas, quedan 256 miligramos del medicamento en el organismo.





EJERCICIOS DEL LIBRO PARA RESOLVER



EJERCICIO N° 1 (página 435)

Para cada una de las siguientes funciones, determine su dominio, rango, la ecuación de su asíntota y trace su gráfica.

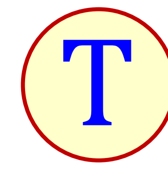
i) $n(x) = -3log_{1/2}(x-4)+1$

k) $p(x) = 4 - 3ln(1-3x)$

EJERCICIO N° 2 (página 435)

Para cada una de las funciones del ejercicio 1, halle el dominio, el rango, la ecuación de la asíntota y la regla de correspondencia de su función inversa. Además, grafique la función original y la función inversa en un mismo plano cartesiano.

RESPUESTAS: En las páginas 495 y 496 del libro texto.





¿Qué hemos aprendido?

- Reconocer una función logaritmo, hallar su dominio y la ecuación de su asíntota.
- Graficar una función logaritmo en el plano cartesiano y determinar su rango.

¿Qué debemos hacer para alcanzar el objetivo del tema?

- Repasar los ejemplos y ejercicios desarrollados.
- Resolver ejercicios de evaluaciones pasadas y los propuestos en el libro texto.

REVISE EL LIBRO TEXTO DE LA ASIGNATURA

TEORÍA Y PRÁCTICA	AUTOR	TÍTULO	EDITORIAL
Páginas: 415 - 437	Cárdenas, V., del Águila, V., Mitacc,M., y Yalta, A.	Matemática Básica (2a ed.) (2017)	Universidad de Lima Fondo Editorial

